Автоматика и телемеханика, № 7, 2024

Линейные системы

© 2024 г. **В.А. КАМЕНЕЦКИЙ, канд. физ.-мат. наук (vlakam@ipu.ru)**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ЧАСТОТНЫЙ КРИТЕРИЙ КВАДРАТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ МЕЖДУ ТРЕМЯ ЛИНЕЙНЫМИ ПОДСИСТЕМАМИ

Для связных систем с переключениями между тремя линейными дискретными подсистемами предлагается новый частотный критерий существования квадратичной функции Ляпунова, обеспечивающей устойчивость системы при произвольных переключениях. Применение критерия демонстрируется на примере системы третьего порядка.

Ключевые слова: дискретные системы с переключениями, устойчивость, функции Ляпунова, матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231024070014, **EDN:** XSEHQE

1. Введение

Теория систем с дискретным временем активно развивается в последнее время. Различные аспекты этой теории рассматриваются в относительно недавних публикациях [1–7] (см. также приведенную в них библиографию). Здесь решается задача квадратичной устойчивости связных [3] дискретных систем с переключениями между тремя линейными стационарными подсистемами при любых законах переключения. Термин «связная система» будет ясен из дальнейшего. Под квадратичной устойчивостью понимается устойчивость системы, которую можно установить с помощью функции Ляпунова из класса квадратичных форм или квадратичной функции Ляпунова (КФЛ). Для связной системы с переключениями между двумя подсистемами эта задача эквивалентна [3] задаче абсолютной устойчивости дискретной системы с одной нелинейностью, и критерием квадратичной устойчивости такой системы является известный критерий Цыпкина [8]. В случае переключений между двумя подсистемами связность означает, что ранг разности матриц, определяющих переключаемые подсистемы, равен единице.

Частотный критерий существования КФЛ для связных дискретных систем с переключениями между тремя линейными подсистемами получен в [3]. Недостатком этого критерия является избыточная громоздкость при его получении и избыточная громоздкость конечного результата. Эта громоздкость объясняется следующим. Квадратичная устойчивость системы с переключениями следует из существования общей квадратичной функции Ляпунова (ОКФЛ). В рассматриваемом случае существование ОКФЛ определяется разрешимостью системы из трех линейных матричных неравенств (ЛМН) Ляпунова для дискретных систем. Эта система ЛМН является связной, и в [3] получено одно эквивалентное ей результирующее матричное неравенство (МН). Однако (а) это МН не является ЛМН и (б) частотные условия его разрешимости не удается получить на основании обобщенной леммы Калмана–Сеге–Попова [9, 10], как это было сделано в [3] в случае критерия Цыпкина. Чтобы преодолеть неудобство (б) в [3] с помощью дробно-линейного преобразования от системы ЛМН для дискретных систем делается переход к эквивалентной системе ЛМН Ляпунова для непрерывных систем. Результирующее МН для этой системы снова не является ЛМН, но условия его разрешимости установлены в [3] в форме частотного критерия на основании частотной теоремы [11, с. 54] (KYP лемма). Условия этого критерия выражаются через элементы «передаточной матрицы» для непрерывной системы, полученной в результате преобразования. После этого достаточно трудоемко эти элементы выражаются через элементы «передаточной матрицы» исходной дискретной системы.

Здесь с использованием нового результата (теорема 2 из [12]) для исходной системы из трех ЛМН Ляпуновского типа для дискретных систем удается получить эквивалентное ей результирующее МН, которое является ЛМН. Далее показывается, что разрешимость этого ЛМН устанавливается с помощью обобщенной леммы Калмана–Сеге–Попова в виде частотного критерия. В результате получен новый частотный критерий квадратичной устойчивости для рассматриваемых систем, что и является основной целью работы.

В разделе 2 приводится система из трех ЛМН Ляпунова для дискретных систем, к вопросу о разрешимости которой сводится задача квадратичной устойчивости рассматриваемых систем. Основной результат – частотный критерий квадратичной устойчивости – излагается в разделе 3. В разделе 4 приводится численный пример системы третьего порядка, для которой с помощью предлагаемого критерия аналитически найдена полная (по параметру) область квадратичной устойчивости.

2. Постановка задачи

В статье исследуется линейная дискретная система с переключениями

$$x(t+1) = A(t)x(t), \quad A(t) \in \overline{A} = \{A_1, A_2, A_3\}, \tag{1}$$

где $A_s \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $A(t) : \mathrm{Z}_+ \longrightarrow \overline{A}$ – отображение из множества Z_+ неотрицательных целых чисел в $\overline{A}$. Матрицы A_s предполагаются устойчивыми (шуровыми, см. [13]), т.е. $r(A_s) = \max\limits_{\nu} |\mu_\nu(A_s)| < 1$ при $s = \overline{1,3}$, μ_ν – собственные числа матрицы A_s. Для исследования устойчивости системы с переключениями (1) будут использоваться КФЛ следующего вида (символ $\{\cdot\}^\top$ означает транспонирование):

$$v(x) = x^\top Lx, \quad L = L^\top = \|l_{ij}\|_{i,j=1}^{n}. \tag{2}$$

Известно [3], что существование КФЛ (2) определяется разрешимостью системы ЛМН

$$I_s = A_s^\top L A_s - L < 0, \quad s = \overline{1,3}. \tag{3}$$

Система (1) является связной (см. [3]), если матрицы $\{A_1, A_2, A_3\}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} A_1 &= A, \\ A_2 &= A + b_1 c_1^\top, \\ A_3 &= A + b_2 c_2^\top, \end{aligned} \qquad b_i, c_i \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

В этом случае система (3) представима в виде

$$\begin{aligned} I_1 &= A^\top L A - L < 0, \\ I_2 &= (A + b_1 c_1^\top)^\top L (A + b_1 c_1^\top) - L < 0, \\ I_3 &= (A + b_2 c_2^\top)^\top L (A + b_2 c_2^\top) - L < 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Задачей является получение частотного критерия разрешимости системы ЛМН (5).

3. Системы с переключениями между тремя линейными дискретными системами

Для исследования разрешимости системы (5) используем теорему 2 из [12]. Далее символы «$\bullet$» обозначают элементы под главной диагональю симметрической матрицы, которые совпадают с соответствующими элементами над главной диагональю.

Т е о р е м а 1. *Пусть в системе*

$$I_1 < 0, \quad I_2 = I_1 + Q_1 < 0, \quad I_3 = I_1 + Q_2 < 0 \tag{6}$$

неравенства являются ЛМН относительно неизвестной переменной ν, *т.е.* $I_s = I_s(\nu)$, $s = \overline{1,3}$, *и* $Q_j(\nu) = p_j(\nu) q_j^\top + q_j p_j^\top(\nu)$, *где* $p_j = p_j(\nu)$ *зависит от* ν *линейно, а* q_j *от* ν *не зависит,* $j = 1, 2$. *Тогда система* (6) *эквивалентна одному МН*

$$\widehat{\widehat{I}} = \begin{pmatrix} I_1(\nu) & p_1(\nu) + \dfrac{\tau_1}{2} q_1 & p_2(\nu) - p_1(\nu) + \dfrac{\tau_2}{2} q_2 - \dfrac{\tau_1}{2} q_1 \\ (\bullet)^\top & -\tau_1 & \dfrac{\tau_1 - \tau_2 + \tau_3}{2} \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_3 \end{pmatrix} < 0, \tag{7}$$

которое является ЛМН относительно $(\nu, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$.

Применяя теорему 1 к системе (5), получим, что разрешимость системы (5) эквивалентна разрешимости одного МН относительно элементов матрицы L и трех дополнительных параметров τ_1, τ_2, τ_3. Возможность применения теоремы 1 к системе (5) и вид получаемого в результате МН определяется из следующих соотношений. Матрице $I_1(\nu)$ соответствует матрица $A^\top LA - L$ из системы (5), т.е. $I_1(\nu) = I_1(L) = A^\top LA - L$ (роль параметра ν выполняет матрица L). Разница матриц $I_2 - I_1$ из (5) представима в виде $p_1 q_1^\top + q_1 p_1^\top$:

$$\begin{aligned} I_2 - I_1 &= A_2^\top L A_2 - A_1^\top L A_1 = (A + b_1 c_1^\top)^\top L (A + b_1 c_1^\top) - A^\top LA = \\ &= (A^\top L + c_1 b_1^\top L)(A + b_1 c_1^\top) - A^\top LA = \\ &= A^\top L b_1 c_1^\top + c_1 b_1^\top LA + c_1 b_1^\top L b_1 c_1^\top. \end{aligned} \tag{8}$$

Введем обозначения $p_1^0 = p_1^0(L) = A^\top L b_1$ и $\delta_{11} = \delta_{11}(L) = b_1^\top L b_1$, тогда

$$I_2 - I_1 = p_1^0 c_1^\top + c_1 (p_1^0)^\top + \delta_{11} c_1 c_1^\top = p_1 q_1^\top + q_1 p_1^\top, \tag{9}$$

где $p_1 = p_1(L) = A^\top L b_1 + \left(\frac{\delta_{11}(L)}{2}\right) c_1$, $q_1 = c_1$.

Аналогично, пусть $p_2^0 = p_2^0(L) = A^\top L b_2$ и $\delta_{22} = \delta_{22}(L) = b_2^\top L b_2$, тогда

$$I_3 - I_1 = p_2^0 c_2^\top + c_2 (p_2^0)^\top + \delta_{22} c_2 c_2^\top = p_2 q_2^\top + q_2 p_2^\top, \tag{10}$$

где $p_2 = p_2(L) = A^\top L b_2 + \left(\frac{\delta_{22}(L)}{2}\right) c_2$, $q_2 = c_2$.

Таким образом, в соответствии с теоремой 1 система (5) эквивалентна одному МН

$$\widehat{\widehat{I}} = \begin{pmatrix} A^\top LA - L & p_1(L) + \dfrac{\tau_1}{2} c_1 & p_2(L) - p_1(L) + \dfrac{\tau_2}{2} c_2 - \dfrac{\tau_1}{2} c_1 \\ (\bullet)^\top & -\tau_1 & \dfrac{\tau_1 - \tau_2 + \tau_3}{2} \\ (\bullet)^\top & \bullet & -\tau_3 \end{pmatrix} < 0, \tag{11}$$

которое является ЛМН относительно $(L, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$.

Покажем, что разрешимость ЛМН (11) определяется на основании обобщенной леммы Калмана–Сеге–Попова [10].

Лемма 1. ЛМН (11) *эквивалентно ЛМН*

$$\begin{pmatrix} A^\top LA - L & A^\top L\widehat{B} + \dfrac{\widehat{C}\tau}{2} \\ \widehat{B}^\top LA + \dfrac{\tau \widehat{C}^\top}{2} & \widehat{B}^\top L \widehat{B} - \Gamma \end{pmatrix} < 0, \tag{12}$$

где

$$\widehat{B} = \begin{pmatrix} \widehat{B}_1 & \widehat{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 - b_1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{C} = \begin{pmatrix} \widehat{C}_1 & \widehat{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 - \dfrac{\widehat{\tau}_1}{\widehat{\tau}_2} c_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \widehat{\tau}_1 & 0 \\ 0 & \widehat{\tau}_2 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \widehat{\tau}_1 & \dfrac{-\widehat{\tau}_1 + \widehat{\tau}_2 - \widehat{\tau}_3}{2} \\ \bullet & \widehat{\tau}_3 \end{pmatrix}.$$

Доказательство леммы 1 приведено в Приложении.

Необходимые и достаточные условия разрешимости ЛМН (12) определяются в форме частотного неравенства из обобщенной леммы Калмана–Сеге–Попова [9, 10]. В результате получаем следующий критерий квадратичной устойчивости системы (1).

Т е о р е м а 2. *Пусть матрица A шурова ($r(A) < 1$) и существуют числа $\widehat{\tau}_s > 0$, $s = \overline{1,3}$, такие что $\Gamma > 0$ и частотное неравенство*

$$D(\lambda) = \Gamma + \operatorname{Re}\,[\mathcal{T}\widehat{C}^\top (A - \lambda E_n)^{-1} \widehat{B}] > 0 \tag{13}$$

выполняется при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, где E_n – единичная $(n \times n)$-матрица ($\operatorname{Re} W = (W + W^*)/2$, $W^* = \overline{W}^\top$ – эрмитово сопряженная к W, здесь и далее символ $\overline{\{\cdot\}}$ означает комплексное сопряжение, знак неравенства означает положительную определенность эрмитовой формы). Тогда связная система (1) имеет ОКФЛ (система (5) разрешима, система (1) устойчива). Если система (5) разрешима, то такой набор чисел $\widehat{\tau}_s > 0$, $s = \overline{1,3}$, существует.

Выпишем частотное условие (13) более детально. Логично считать $W(p) = C^\top (A - pE_n)^{-1} B$, $p \in \mathbb{C}$, аналогом передаточной матрицы для системы (1). Здесь $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$. Введем обозначение $\Delta(p) = (A - pE_n)^{-1}$, тогда

$$W(p) = C^\top \Delta(p) B = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad w_{ij}(p) = c_i^\top \Delta(p) b_j. \tag{14}$$

Далее для простоты уберем «крышки» и вместо $\widehat{\tau}_s$ будем использовать τ_s. Для матрицы $D(\lambda)$ из (13) имеем

$$D(\lambda) = \Gamma + \operatorname{Re} \mathcal{T}\widehat{W}(\lambda) = \Gamma + 1/2 \left[\mathcal{T}\widehat{W}(\lambda) + \widehat{W}^*(\lambda)\mathcal{T}^\top \right],$$

где

$$\widehat{W}(\lambda) = \widehat{C}^\top \Delta(\lambda) \widehat{B} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 - \dfrac{\tau_1}{\tau_2} c_1 \end{pmatrix}^\top \Delta(\lambda) \begin{pmatrix} b_1 & b_2 - b_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} w_{11}(\lambda) & w_{12}(\lambda) - w_{11}(\lambda) \\ w_{21}(\lambda) - \dfrac{\tau_1}{\tau_2} w_{11}(\lambda) & w_{22}(\lambda) - \dfrac{\tau_1}{\tau_2} w_{12}(\lambda) - w_{21}(\lambda) + \dfrac{\tau_1}{\tau_2} w_{11}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Окончательно неравенство $D(\lambda) > 0$ из (13) перепишем в виде (для краткости используем w_{ij} вместо $w_{ij}(\lambda)$)

$$(15)\quad D(\lambda) = \Gamma + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\tau_1 \mathrm{Re}\, w_{11} & \tau_1 w_{12} + \tau_2 \overline{w_{21}} - 2\tau_1 \mathrm{Re}\, w_{11} \\ \overline{(\bullet)} & 2\tau_1 \mathrm{Re}\,(w_{11} - w_{12}) + 2\tau_2 \mathrm{Re}\,(w_{22} - w_{21}) \end{pmatrix} > 0.$$

Замечание 1. Утверждение теоремы 2 справедливо, если в ее формулировке неравенство (13) заменить неравенством (15), где $w_{ij} = w_{ij}(\lambda) = c_i^\top \Delta(\lambda) b_j$, $i, j = 1, 2$.

Если система (1) является системой с переключениями треугольного типа (см. [3]), т.е. $c_1 = c_2 \triangleq c$, тогда $w_{11} = w_{21} \triangleq W_1 = c^\top \Delta(\lambda) b_1$, $w_{22} = w_{12} \triangleq W_2 = c^\top \Delta(\lambda) b_2$. В этом случае неравенство (15) можно переписать в виде

$$(16)\quad D(\lambda) = \begin{pmatrix} \tau_1(1 + \mathrm{Re}\, W_1) & \dfrac{-\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 + \tau_1 W_2 + \tau_2 \overline{W_1}}{2} - \tau_1 \mathrm{Re}\, W_1 \\ \overline{(\bullet)} & \tau_3 + (\tau_2 - \tau_1)\,(\mathrm{Re}\, W_2 - \mathrm{Re}\, W_1) \end{pmatrix} > 0.$$

Замечание 2. Для системы (1) треугольного типа, т.е. при $c_1 = c_2 = c$, утверждение теоремы 2 справедливо, если в ее формулировке неравенство (13) заменить неравенством (16), где $W_j = W_j(\lambda) = c^\top \Delta(\lambda) b_j$, $j = 1, 2$.

Сравните условия (15) и (16) критерия теоремы 2 для связных систем с переключениями и систем с переключеними треугольного типа с условиями теоремы 2 из [3] и их модификацией для систем треугольного типа (формулы (6.3)–(6.5) из [3]). Значительный прогресс очевиден.

Замечание 3. Неравенства (13), (15) и (16) линейны по параметру $\mathcal{T}$, поэтому, не ограничивая общности, в этих неравенствах можно положить $\tau_3 = 1$. Таким образом, в этих неравенствах останется только по два дополнительных параметра $\tau_1 > 0$ и $\tau_2 > 0$.

Известный критерий Цыпкина [8] является критерием квадратичной устойчивости при переключениях между двумя подсистемами. Критерий теоремы 2 можно считать аналогом критерия Цыпкина при переключениях между тремя подсистемами.

4. Численное решение

Численное решение задачи о квадратичной устойчивости системы (1) состоит в применении стандартных программных средств для проверки разрешимости системы ЛМН (5) размерности $3n$ относительно $n(n+1)/2$ неизвестных. Использование результата леммы 1 позволяет вместо проверки системы (5) проверять разрешимость одного ЛМН (12) размерности $n+2$ относительно $n(n+1)/2 + 3$ неизвестных. Такой переход позволяет существенно упростить задачу, особенно при больших n.

5. Пример

Рассмотрим связную систему с переключениями вида (1) из примера в [3]. В этом примере матрицы A_s в (1) задаются соотношением (4), в котором

$$A_1 = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & -1{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & -1{,}5 \end{pmatrix}, \quad b_1 = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$c_1 = c_2 = c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где $k_i \geqslant 0$ – параметры, определяющие область устойчивости системы с переключениями. Тогда матрицы A_2 и A_3 имеют вид

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & -1{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & -1{,}5 + k_1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & -1{,}5 + k_2 \\ 0 & 0{,}5 & -1{,}5 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Далее на систему (1) с матрицами A_s из (17) и (18) будем ссылаться как на систему (1;17).

Повторное рассмотрение примера из [3] объясняется следующим. В примере из [3] при условии $k_1 = k_2 = k$ найдена полная область квадратичной устойчивости по параметру k. Этот результат получен с использованием необходимых (отдельно) и достаточных (отдельно) условий разрешимости системы ЛМН (5). Оказалось, что оценки по этим условиям совпадают. Это позволило сделать вывод о том, что найдена полная область. Заметим, что условия из [3] существенно используют то, что рассматривается система треугольного типа, т.е. при $c_1 = c_2 = c$.

Задачей настоящего раздела является повторение результата из [3] на основании критерия теоремы 2. Хотя далее будет использоваться вариант теоремы 2 из замечания 2, но в самой теореме 2 требование «треугольности» не фигурирует.

Ниже используются вспомогательные выкладки из [3]. Матрица A_1 очевидно шурова, $|\mu_i(A_1)| < 1$, так как $\mu_i(A_1) = -0{,}5$, $i = \overline{1,3}$. Матрица A_2 шурова при $k_1 \in [0;\ 3{,}375)$, а матрица A_3 шурова при $k_2 \in [0;\ 0{,}25)$.

Функции $W_j(\lambda) = c^\top (A - \lambda E_n)^{-1} b_j$ из (16) имеют вид

$$W_1(\lambda) = -8k_1\lambda^2/(2\lambda+1)^3 \ \text{ и } \ W_2(\lambda) = -4k_2\lambda/(2\lambda+1)^3,$$

$\det(A - \lambda E) = -(0{,}5 + \lambda)^3$. Проверку неравенства (16) нужно проводить при всех $\lambda \in \mathbb{C}$, таких что $|\lambda| = 1$. Для множества $|\lambda| = 1$ используем параметризацию $\lambda = \frac{1-i\omega}{1+i\omega}$ при всех $\omega \in [-\infty, \infty]$. Вычислим $W_1(\lambda)$ и $W_2(\lambda)$ при $\lambda = \frac{1-i\omega}{1+i\omega}$. Выпишем отдельно действительную и мнимую части $W_j\left(\frac{1-i\omega}{1+i\omega}\right)$, одновременно вводя упрощающие обозначения $\operatorname{Re} W_j\left(\frac{1-i\omega}{1+i\omega}\right) = R_j(\omega) = R_j$ и $\operatorname{Im} W_j\left(\frac{1-i\omega}{1+i\omega}\right) = I_j(\omega) = I_j$ (см. [3]):

$$
\begin{aligned}
R_1 = \quad & R_1(\omega) = \operatorname{Re} W_1\left(\frac{1-i\omega}{1+i\omega}\right) = \frac{-8k_1(1+\omega^2)(27+18\omega^2-\omega^4)}{(9+\omega^2)^3}, \\
I_1 = \quad & I_1(\omega) = \operatorname{Im} W_1\left(\frac{1-i\omega}{1+i\omega}\right) = \frac{-64k_1\omega^3(1+\omega^2)}{(9+\omega^2)^3}, \\
R_2 = \quad & R_2(\omega) = \operatorname{Re} W_2\left(\frac{1-i\omega}{1+i\omega}\right) = \frac{-4k_2(1+\omega^2)(27-36\omega^2+\omega^4)}{(9+\omega^2)^3}, \\
I_2 = \quad & I_2(\omega) = \operatorname{Im} W_2\left(\frac{1-i\omega}{1+i\omega}\right) = \frac{-4k_2(1+\omega^2)(54\omega-10\omega^3)}{(9+\omega^2)^3}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

В терминах (19) неравенство (16) примет вид

$$
D(\omega) = \begin{pmatrix} \tau_1(1+R_1) & \dfrac{-\tau_1+\tau_2-\tau_3+\tau_1R_2+\tau_2R_1-2\tau_1R_1}{2} + i\dfrac{\tau_1I_2-\tau_2I_1}{2} \\ \overline{(\bullet)} & \tau_3 + (\tau_2-\tau_1)(R_2-R_1) \end{pmatrix} > 0.
$$

Считаем далее $k_2 = k_1 = k$ и сделаем замену $\omega^2 = y \geqslant 0$. Требуется определить наибольшую область $[0, k^*)$, для которой существует набор параметров $\tau_i > 0$, $j = 1, 2, 3$, таких, что при $k \in [0, k^*)$ неравенство $D(\omega) \cong D(y) > 0$ выполняется при всех $y \geqslant 0$. Проверка неравенства $D(y) > 0$ сводится к проверке неравенств (достаточно A и C):

A: $D_{11} = \tau_1(1+R_1) > 0$, B: $D_{22} = \tau_3 + (\tau_2-\tau_1)(R_2-R_1) > 0$, C: $\det D(y) > 0$,

где $D_{ij} = D_{ij}(y)$, $i, j = 1, 2$, – элементы матрицы $D(y)$. Неравенство A эквивалентно неравенству

$$
\begin{aligned}
P_1(y) &= (9+y)^3 D_{11}(y) = \tau_1(1+R_1) = \\
&= \tau_1(9+y)^3 - 8\tau_1 k(1+y)(27+18y-y^2) = \\
&= \tau_1(1+8k)y^3 + \tau_1(27-136k)y^2 + \tau_1(243-360k)y + \tau_1 27(27-8k) > 0.
\end{aligned}
$$

Проверка неравенства A совпадает с проверкой неравенств (7.4) и (7.5) из [3]. В [3] показано, что при $k < 0{,}44$ неравенство $P_1(y) > 0$ выполнено при всех $y \geqslant 0$.

В соответствии с замечанием 3 далее считаем $\tau_3 = 1$ и пусть для краткости $\tau_2 - \tau_1 \triangleq \delta$. Тогда проверка неравенства B сводится к проверке неравенства

$$
\begin{aligned}
P_2(y) &= (9+y)^3 D_{22}(y) = (9+y)^3 + 4k\delta(1+y)(27+72y-3y^2) = \\
&= (1-12k\delta)y^3 + (27+276k\delta)y^2 + (243+396k\delta)y + 729 + 108k\delta > 0.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим неравенство C:

$$\det D = D_{11}D_{22} - D_{12}\overline{D_{12}} = D_{11}D_{22} - (\mathrm{Re}D_{12})^2 - (\mathrm{Im}D_{12})^2 > 0.$$

Введем обозначения $P_3(y) \triangleq 2(9+y)^3 \operatorname{Re} D_{12}$ и $P_4(y) \triangleq 2(9+y)^3 \operatorname{Im} D_{12}$, тогда

$$P_3(y) = 2(9+y)^3 \operatorname{Re} D_{12}(y) = 2\big(\tau_1(R_2 - R_1) + \delta R_1 + \delta - 1\big)(9+y)^3,$$
$$P_4(y) = 2(9+y)^3 \operatorname{Im} D_{12}(y) = 2\big(\tau_1 I_2 - \tau_2 I_1\big)(9+y)^3.$$

Используя выражения из (19), получаем

$$P_3(y) = y^3[4k(2\delta - 3\tau_1) + \delta - 1] + y^2[27(\delta-1) + 4k(69\tau_1 - 34\delta)] + \\ + y[9(27(\delta-1) - 40k\delta + 44k\tau_1)] + [27(27(\delta-1) - 4k(2\delta - \tau_1))],$$

$$P_4(y) = 4k\tau_1\sqrt{y}(1+y)(10y-54) + 64k\tau_2 y\sqrt{y}(1+y) = \\ = 4k\sqrt{y}(1+y)\big(\tau_1(10y-54) + 16\tau_2 y\big).$$

Неравенство C эквивалентно неравенству

$$P(y) \triangleq (9+y)^6 \det D(y) = P_1(y)P_2(y) - \frac{1}{4}P_3(y)^2 - \frac{1}{4}P_4(y)^2 > 0. \tag{20}$$

Многочлен $P(y)$ – многочлен шестой степени по переменной y. Коэффициенты этого многочлена $f_s = f_s(k)$ при y^s считаем функциями k, зависящими от дополнительных параметров τ_1 и τ_2. Коэффициент $f_6(k)$ этого многочлена при y^6 равен

$$f_6(k) = \tau_1(1+8k)(1-12k\delta) - (1/4)[4k(2\delta - 3\tau_1) + \delta - 1]^2.$$

Необходимым условием выполнения $P(y) > 0$ при всех $y \geqslant 0$ будет $f_6(k) \geqslant 0$. Функция $f_6(k)$ представляет собой многочлен второй степени по переменной k. Коэффициент этого многочлена при k^2 равен $a_6 = -96\tau_1\delta - 4(2\delta - 3\tau_1)^2 = -4(2\tau_2 + \tau_1)^2$, т.е. $a_6 < 0$ всегда, так как $\tau_j > 0$. Из этого следует, что $f_6(k)$ является вогнутой функцией. Оценкой сверху для искомой области $[0, k^*)$ является полуинтервал $[0; 0{,}25)$ – область шуровости матрицы A_3. Проверим значения $f_6(0)$ и $f_6(0{,}25)$:

$$f_6(0) = \tau_1 - (1/4)\big(\delta - 1\big)^2,$$
$$f_6(0{,}25) = \tau_1(1+2)(1-3\delta) - (1/4)\big((2\delta - 3\tau_1) + \delta - 1\big)^2.$$

Условие $f_6(0) > 0$ дает оценку на параметры $4\tau_1 > \big(\delta - 1\big)^2$. Преобразуем выражение для $f_6(0{,}25)$:

$$f_6(0{,}25) = 3\tau_1(1-3\delta) - \frac{1}{4}\big(3\delta - 3\tau_1 - 1\big)^2 = -\frac{1}{4}\big(3\delta + 3\tau_1 - 1\big)^2 = -\frac{1}{4}\big(3\tau_2 - 1\big)^2.$$

Из этого следует, что $f_6(0{,}25) < 0$ при всех значениях параметров, кроме $\tau_2 = 1/3$. Таким образом, единственной возможностью получить наибольшую область $[0, k^*)$, в которой $f_6(0{,}25) > 0$, это положить $\tau_2 = 1/3$. Если взять $\tau_2 = 1/3$ и определить τ_1 так, чтобы $f_6(0) > 0$, то из вогнутости $f_6(k)$ последует, что $f_6(k) > 0$ при всех $k \in [0;\, 0{,}25)$. Отчасти наугад, отчасти чтобы получить $\delta = 0$, положим $\tau_1 = \tau_2 = 1/3$. В этом случае $f_6(0) = 1/12 > 0$.

Оказывается, что при $\tau_1 = \tau_2 = 1/3$ все оставшиеся коэффициенты $f_s(k)$, $s = 0, \ldots, 5$, многочлена $P(y) = \sum\limits_{s=0}^{6} f_s(k) y^s$ из (20) являются вогнутыми функциями по k. Кроме этого, для значений этих функций в крайних точках полуинтервала $[0;\, 0{,}25)$ выполнены неравенства $f_s(0) > 0$ и $f_s(0{,}25) > 0$, $s = 0, \ldots, 5$. Утомительную проверку этого факта средствами элементарной алгебры здесь опустим. Таким образом, получаем, что $f_s(k) > 0$ при всех $k \in [0;\, 0{,}25)$, $s = 0, \ldots, 6$. Следовательно, неравенство (20) выполнено при всех $y \geqslant 0$. На основании теоремы 2 заключаем, что область квадратичной устойчивости системы (1;17) исчерпывается множеством $[0;\, 0{,}25)$. Поскольку эта область совпадает с областью шуровости определяющих систему (1;17) матриц $\{A_1, A_2, A_3\}$ по параметру $k_1 = k_2 = k$, то найденная область является полной областью устойчивости системы (1;17) при произвольных переключениях.

6. Заключение

Для связной системы с переключениями между тремя линейными дискретными подсистемами получен критерий существования КФЛ как в форме частотного условия, так и в форме условий разрешимости одного ЛМН. Приведен пример системы третьего порядка, для которой с помощью предлагаемого частотного критерия аналитически найдена полная область (по параметру k) квадратичной устойчивости, которая в рассматриваемом случае совпадает с полной областью устойчивости системы (1;17) при произвольных переключениях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Определим новые параметры

$$\widehat{\tau}_1 \triangleq \delta_{11} + \tau_1, \quad \widehat{\tau}_2 \triangleq \delta_{22} + \tau_2,$$

тогда

$$\begin{aligned}
&p_1(L) + \frac{\tau_1}{2} c_1 = A^\top L b_1 + \frac{\delta_{11}}{2} c_1 + \frac{\tau_1}{2} c_1 = A^\top L \widehat{B}_1 + \frac{\widehat{\tau}_1}{2} \widehat{C}_1,\\
&p_2(L) - p_1(L) + \frac{\tau_2}{2} c_2 - \frac{\tau_1}{2} c_1 =\\
&= A^\top L b_2 - A^\top L b_1 + \frac{\delta_{22} + \tau_2}{2} c_2 - \frac{\delta_{11} + \tau_1}{2} c_1 =\\
&= A^\top L (b_2 - b_1) + \frac{\widehat{\tau}_2}{2} c_2 - \frac{\widehat{\tau}_1}{2} c_1 = A^\top L \widehat{B}_2 + \frac{\widehat{\tau}_2}{2} \widehat{C}_2.
\end{aligned} \tag{П.1}$$

Осталось представить матрицу $\begin{pmatrix} -\tau_1 & \dfrac{\tau_1-\tau_2+\tau_3}{2} \\ \bullet & -\tau_3 \end{pmatrix}$ в виде $\left(\widehat{B}^\top L\widehat{B}-\Gamma\right)$.

Учитывая $b_1^\top Lb_2 \triangleq \delta_{12}$ и $b_2^\top Lb_1 \triangleq \delta_{21}$, перепишем матрицу $\widehat{B}^\top L\widehat{B}$:

$$\begin{aligned} \widehat{B}^\top L\widehat{B} &= \begin{pmatrix} b_1^\top \\ b_2^\top - b_1^\top \end{pmatrix} L \begin{pmatrix} b_1 & b_2-b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^\top L \\ b_2^\top L - b_1^\top L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2-b_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12}-\delta_{11} \\ \delta_{21}-\delta_{11} & \delta_{22}-2\delta_{12}+\delta_{11} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{П.2}$$

Таким образом, требуется определить элементы матрицы $\Gamma = \|\gamma_{ij}\|_{i,j=1}^n$ так, чтобы

$$\begin{pmatrix} -\tau_1 & \dfrac{\tau_1-\tau_2+\tau_3}{2} \\ \bullet & -\tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{11}-\gamma_{11} & \delta_{12}-\delta_{11}-\gamma_{12} \\ \delta_{21}-\delta_{11}-\gamma_{21} & \delta_{22}-2\delta_{12}+\delta_{11}-\gamma_{22} \end{pmatrix}. \tag{П.3}$$

Так как $-\tau_1 = \delta_{11}-\widehat{\tau}_1$, то из равенства между элементами $\{\cdot\}_{11}$ матриц из (П.3) следует $\gamma_{11} = \widehat{\tau}_1$. Учтем $-\tau_2 = \delta_{22}-\widehat{\tau}_2$, из равенства между элементами $\{\cdot\}_{12}$ получим

$$\frac{\tau_1-\tau_2+\tau_3}{2} = \frac{-\delta_{11}+\widehat{\tau}_1+\delta_{22}-\widehat{\tau}_2+\tau_3}{2} = \delta_{12}-\delta_{11}-\gamma_{12}.$$

Тогда

$$\delta_{11}+\delta_{22}+\widehat{\tau}_1-\widehat{\tau}_2+\tau_3 = 2\delta_{12}-2\gamma_{12}.$$

Из равенства между элементами $\{\cdot\}_{22}$ имеем

$$-\tau_3 = \delta_{22}-2\delta_{12}+\delta_{11}-\gamma_{22}.$$

Складываем два последних равенства, получаем

$$\widehat{\tau}_1-\widehat{\tau}_2 = -2\gamma_{12}-\gamma_{22}.$$

Положим $\gamma_{22} = \widehat{\tau}_3$, тогда

$$\gamma_{12} = (-\widehat{\tau}_1+\widehat{\tau}_2-\widehat{\tau}_3)/2.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{pmatrix} -\tau_1 & \dfrac{\tau_1-\tau_2+\tau_3}{2} \\ \bullet & -\tau_3 \end{pmatrix} = \left(\widehat{B}^\top L\widehat{B}-\Gamma\right),$$

где

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \widehat{\tau}_1 & \dfrac{-\widehat{\tau}_1+\widehat{\tau}_2-\widehat{\tau}_3}{2} \\ \bullet & \widehat{\tau}_3 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aleksandrov A., Mason O.* Diagonal stability of a class of discrete-time positive switched systems with delay // IET Control Theory Appl. 2018. V. 12. No. 6. P. 812–818.
2. *Проскурников А.В., Матвеев А.С.* Критерии Цыпкина и Джури-Ли синхронизации и устойчивости дискретных многоагентных систем // АиТ. 2018. № 6. С. 119–139.
3. *Каменецкий В.А.* Частотные условия устойчивости дискретных систем с переключениями // АиТ. 2018. № 8. С. 3–26.
4. *Маликов А.И.* Оценивание состояния и стабилизация дискретных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // АиТ. 2019. № 11. С. 59–82.
5. *Александров А.Ю., Семенов А.Д., Фрадков А.Л.* Запаздывания и переключения не мешают размещать агентов на отрезке: дискретное время // АиТ. 2020. № 4. С. 79–93.
6. *Пакшин П.В., Емельянова Ю.П.* Управление с итеративным обучением дискретными стохастическими системами с переключениями // АиТ. 2020. № 11. С. 93–111.
7. *Каменецкий В.А.* Дискретные попарно связные системы с переключениями и системы Лурье, критерий Цыпкина для систем с двумя нелинейностями // АиТ. 2022. № 9. С. 55–80.
8. *Цыпкин Я.З.* Об устойчивости в целом нелинейных импульсных автоматических систем // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. № 1. С. 52–65.
9. *Якубович В.А.* Абсолютная устойчивость импульсных систем с несколькими нелинейными или линейными нестационарными блоками. I, II // АиТ. 1967. № 9. С. 59–72; 1968. № 2. С. 81–101.
10. *Шепелявый А.И.* Абсолютная неустойчивость нелинейных амплитудно-импульсных систем управления. Частотные критерии // АиТ. 1972. № 6. 49–56.
11. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.
12. *Каменецкий В.А.* Матричные неравенства в теории устойчивости: новые результаты на основе теоремы о свертывании // АиТ. 2023. №2. С. 103–121.
13. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014. 506 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.В. Пакшиным.

Поступила в редакцию 14.03.2024

После доработки 21.05.2024

Принята к публикации 30.05.2024